

《数学实验》课程作业

第二次大作业

题目：线性方程组的数值解法

学 院： 建筑学院
专 业： 建筑环境与能源应用工程
班 级： 建环 9
姓 名： 王嘉豪
学 号： 2019010129

2022 年 11 月 14 日

目录

1 系数矩阵为范德蒙矩阵的线性方程组	3
1.1 研究条件数的变化	3
1.2 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响	4
1.2.1 系数矩阵出现的扰动对精确解的影响	4
1.2.2 右端项出现的扰动对精确解的影响	5
1.3 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代求解，对比求解精度。	6
1.3.1 系数矩阵为三阶范德蒙矩阵的方程求解	6
1.3.2 系数矩阵为五阶范德蒙矩阵的方程求解	8
2 不同阶数的希尔伯特矩阵为系数矩阵的线性方程组	11
2.1 研究条件数的变化	11
2.2 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响	13
2.2.1 系数矩阵出现的扰动对精确解的影响	13
2.2.2 右端项出现的扰动对精确解的影响	14
2.3 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代、SOR 迭代与带预处理的梯度法求解，对比求解精度。	15
2.3.1 系数矩阵为三阶希尔伯特矩阵的方程求解	15
2.3.2 系数矩阵为四阶希尔伯特矩阵的方程求解	18
2.3.3 系数矩阵为五阶希尔伯特矩阵的方程求解	20
3 实验总结	21

第二次大作业：线性方程组的数值解法

2019010129

建环 9

王嘉豪

2022 年 11 月 14 日

摘要： 本次实验通过高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法对系数矩阵为范德蒙矩阵的线性方程组和系数矩阵为希尔伯特矩阵的线性方程组进行求解，通过对其相对残差的分析，对比不同求解方法的精度，从而对这些不同的求解方法有一个定量的认识。

关键词： 范德蒙矩阵，希尔伯特矩阵，线性方程组，误差分析

1 系数矩阵为范德蒙矩阵的线性方程组

1.1 研究条件数的变化

首先让我们来探究一下范德蒙矩阵的条件数随阶数 k 的变化。我们在此选择的是 2-条件数进行分析。我们用 MATLAB 自带的 `vander` 函数和 `flipr` 函数生成不同阶数的范德蒙矩阵（这里矩阵的第二列取的是 (1,2) 不同步长的均分，步长则根据范德蒙矩阵的阶数来定），然后再分别作出 $k \in (1,10)$, $k \in (1,50)$, $k \in (1,100)$, $k \in (1,1000)$ 的条件数随阶数的变化图像，结果如下：

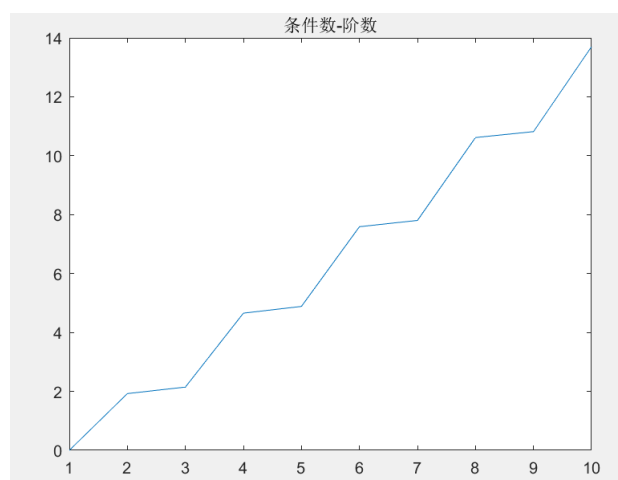


图 1: $k \in (1,10)$

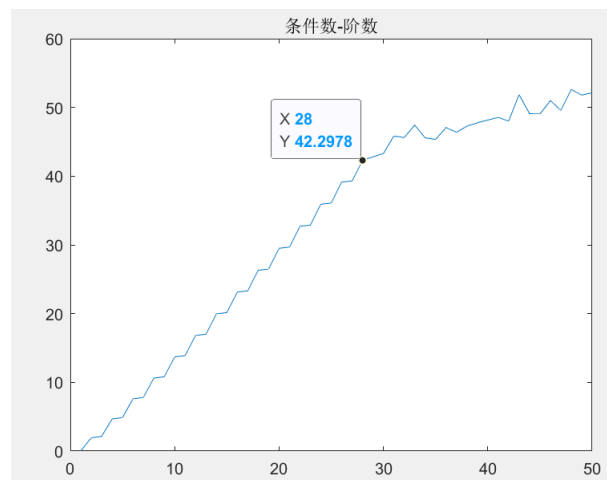


图 2: $k \in (1,50)$

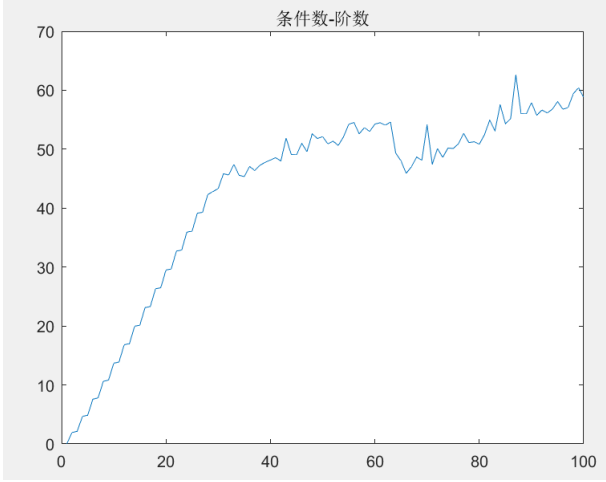


图 3: $k \in (1, 100)$

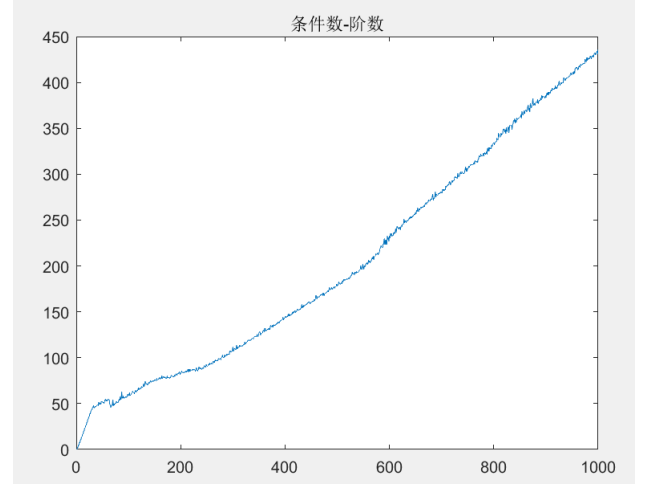


图 4: $k \in (1, 1000)$

从图像中我们可以看出，大概在 $k \in (1, 28)$ 的区间内，范德蒙矩阵的条件数随阶数的变化大概呈现一个锯齿的形状，而在 k 大于 28 之后，其不再维持前面的锯齿状变化，而是呈现一个不规则的形态。我们再从一个比较大的区间 ($k \in (1, 1000)$) 来观察，发现其条件数和阶数的关系从宏观上看是一个近似线性的变化，从微观上看依然是一个锯齿状形状。

1.2 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响

接下来我们考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响。为了计算的简便性以及其代表性，我们分析时选择的系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.5000 & 2.2500 & 3.3750 \\ 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 \\ 1.0000 & 2.5000 & 6.2500 & 15.6250 \end{bmatrix}$ ，右端项 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，下面对方程 $Ax=b$ 进行求解，并考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响。

1.2.1 系数矩阵出现的扰动对精确解的影响

1.2.1.1 理论分析

我们首先通过理论分析来探究系数矩阵出现的扰动对精确解的影响。

根据上课所讲内容，当 A 有扰动 δA 时，分析 x 的误差 δx ，则：

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \quad (1)$$

化简 (1) 式，可求得：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (2)$$

接下来我们对具体问题进行分析，我们给 A 一个小扰动，也即令 $A_{1,1}$ 从 1 变为 1.01，所得

新的矩阵如下：

$$B = \begin{bmatrix} 1.0100 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.5000 & 2.2500 & 3.3750 \\ 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 \\ 1.0000 & 2.5000 & 6.2500 & 15.6250 \end{bmatrix} \quad (3)$$

我们易用 MATLAB 求得 A 矩阵的 2-条件数 $\text{cond}(A)=1329.44$ ，A 的 2-范数 $\|A\|=19.8724$ ， $\|\delta A\|=0.01$ 。因此根据式 (2) 可得， $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 2.0210$ 。

1.2.1.2 实验分析：

接下来我们通过 MATLAB 具体计算来考察系数矩阵出现的扰动对精确解的影响。

我们首先求解方程 $Ax=b$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

然后再求解小扰动后得到的 $\bar{x}$ ，也即求解方程 $B\bar{x}=b$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0.9091 \\ 1.8576 \\ 0.0727 \\ -0.0121 \end{bmatrix} \quad (5)$$

我们令 $\|\delta x\|=\|x-\bar{x}\|$ ，则可以求得 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}=0.0824$ ，小于上面求得理论值 2.0210，可见该理论值还是比较可信的。同时我们注意到，尽管给 A 只加了一个小扰动 ($\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0.0005$)，但是给求解结果还是产生了比较大的影响 ($\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.0824$)， $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 比 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ 提升了两个数量级。可以看出范德蒙矩阵 A 是一个条件数比较大的矩阵，可以称为一个病态矩阵，因此其对小扰动的依赖性比较强，也即很容易受到小扰动的干扰和影响。

1.2.2 右端项出现的扰动对精确解的影响

接下来我们考察右端项出现的扰动对精确解的影响。同样为了计算的简便性和其代表性，我们分析时选择的系数矩阵依然为 A，右端项依然为 b。下面考察右端项出现的扰动对精确解的影响。

1.2.2.1 理论分析：

我们首先通过理论分析来探究右端项出现的扰动对精确解的影响。

根据上课所讲内容，当 b 有小扰动 δb 时，分析 x 的误差 δx 。即：

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (6)$$

化简 (6) 式，可求得：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (7)$$

接下来我们对具体问题进行分析，我们给 b 一个小扰动，也即令 $b_{1,1}$ 从 1 变为 1.01，所得的新的右端项如下：

$$c = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

我们易用 MATLAB 求得 $\|\delta b\|=0.01$, $\|b\|=5.4772$, 因此根据式 (7) 可得, $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 2.4272$ 。

1.2.2.2 实验分析：

接下来我们通过 MATLAB 具体计算来考察右端项出现的扰动对精确解的影响。

我们求解小扰动后的 $\bar{x}$ ，也即求解方程 $A\bar{x}=c$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0.9000 \\ 1.8433 \\ 0.0800 \\ -0.0133 \end{bmatrix} \quad (9)$$

我们令 $\|\delta x\|=\|x-\bar{x}\|$ ，则可以求得 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}=0.0907$ ，小于上面求得理论值 2.4272，可见该理论值还是比较可信的。同时我们注意到，尽管给 b 只加了一个小扰动 ($\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 0.0018$)，但是给求解结果还是产生了比较大的影响 ($\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.0907$)， $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 比 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ 提升了 1.5 个数量级。可以看出范德蒙矩阵 A 是一个条件数非常大的矩阵，可以称为一个病态矩阵，因此其对小扰动的依赖性较强，也即很容易受到小扰动的干扰和影响。

1.3 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代求解，对比求解精度。

我们接下来分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法求解方程。为了得到更加多样化、更有代表的实验数据，我们分别选择了系数矩阵为三阶和五阶范德蒙矩阵的方程。

1.3.1 系数矩阵为三阶范德蒙矩阵的方程求解

我们首先求系数矩阵为三阶范德蒙矩阵的方程。同上，我们用 MATLAB 中自带的 `vander` 函数和 `fliplr` 函数构造了如下的系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.5000 & 2.2500 \\ 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为了更加精确地比较几种方法的求解精度，我们选择了一个新的右端项，即：

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (11)$$

构造完系数矩阵和右端项之后，接下来我们分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯—赛德尔迭代法求解方程 $Ax=b$ 。

(1) 首先是高斯消去法，我们在 MATLAB 中进行求解后，所得结果如下：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 19 \\ -32 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (12)$$

接着我们考察高斯消去法求得的解的精度，我们通过计算相对残差来估算其精度，即相对残差

$$\epsilon = \frac{\|Ax - b\|}{\|b\|} \quad (13)$$

通过计算，我们发现其相对残差为 0，也即精度非常高，可以说是一个精确解了。

(2) 然后是雅克比迭代法，我们记初始值为 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，迭代 200 次，所得结果如下：

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1.742519310987267 \times 10^{33} \\ -1.683639513670425 \times 10^{33} \\ -8.712596554936336 \times 10^{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

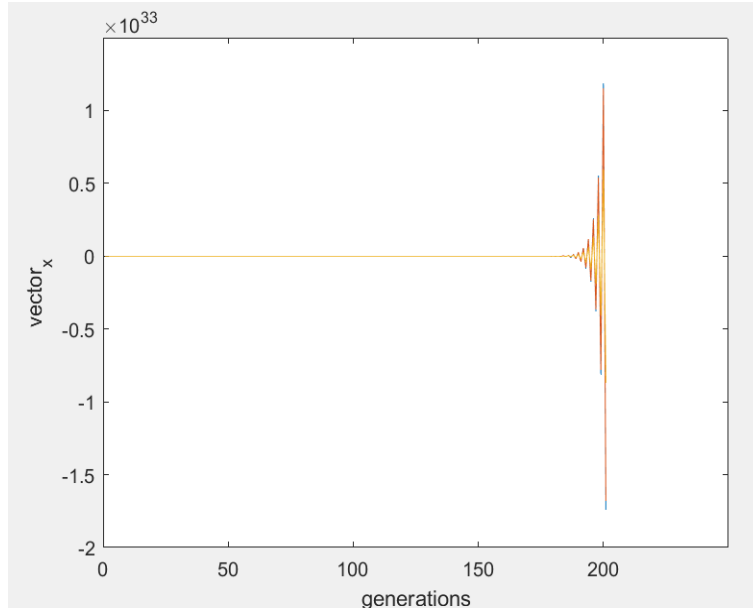


图 5: 雅克比迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

从图像中我们可以注意到，雅克比迭代并不收敛，是一个发散的，我们再求解了一下该迭代对应的谱半径，发现它的谱半径为 1.4662，因此求得一个发散的结果也就不奇怪了，而既然它是发散的，那再去探讨它的精度也就没什么意义了。

(3) 我们再用高斯-赛德尔迭代法对此方程进行求解，同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为初始值，迭代

200 次，所得结果如下：

$$x_3 = \begin{bmatrix} 18.99998468681587 \\ -31.99997916825654 \\ 15.99999341242431 \end{bmatrix} \quad (15)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

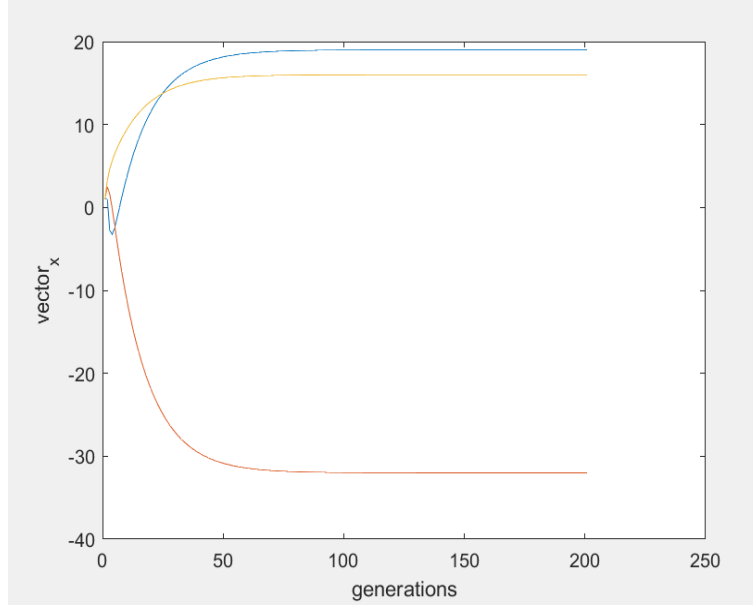


图 6: 高斯-赛德尔迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

我们不难发现用高斯-赛德尔迭代法所求得的结果是收敛的，我们再用 MATLAB 求了一下它对应的谱半径，为 0.9302，是小于 1 的。接下来我们对其精度进行考察，同样计算相对残差，用 MATLAB 求得的结果为 7.5370×10^{-8} ，虽然说并不是一个完全精确的解，但是可以说是一个相当高的精度了。

1.3.2 系数矩阵为五阶范德蒙矩阵的方程求解

我们接下来求解系数矩阵为五阶范德蒙矩阵的方程。同样地，我们也构造了一个五阶范德蒙矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.5000 & 2.2500 & 3.3750 & 5.0625 \\ 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 & 16.0000 \\ 1.0000 & 2.5000 & 6.2500 & 15.6250 & 39.0625 \\ 1.0000 & 3.0000 & 9.0000 & 27.0000 & 81.0000 \end{bmatrix} \quad (16)$$

相应地，我们也构造了一个新的右端项：

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (17)$$

构造完系数矩阵和右端项之后，接下来我们分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯—赛德尔迭代法求解方程 $Ax=b$ 。

(1) 首先是高斯消去法，我们在 MATLAB 中进行求解后，所得结果如下：

$$x_1 = \begin{bmatrix} -57.00000000000006 \\ 141.3333333333334 \\ -118.6666666666667 \\ 42.66666666666666 \\ -5.333333333333333 \end{bmatrix} \quad (18)$$

接着我们考察高斯消去法求得的解的精度，我们可以求得其相对残差为 2.7294×10^{-15} ，我认为这个误差可能不是高斯消元法这个方法本身引起的，而是由于 MATLAB 存储数据时位数受限引起的，再结合 1.3.1 的结果，我们可以得出结论，高斯消去法求得的解是一个精确值。

(2) 然后是雅克比迭代法，我们记初始值为 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，迭代 200 次，所得结果如下：

$$x_2 = \begin{bmatrix} 3.606557839587755 \times 10^{78} \\ 4.382203144923265 \times 10^{78} \\ 2.878760195970126 \times 10^{78} \\ 1.233742779037711 \times 10^{78} \\ 3.811174752481543 \times 10^{77} \end{bmatrix} \quad (19)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

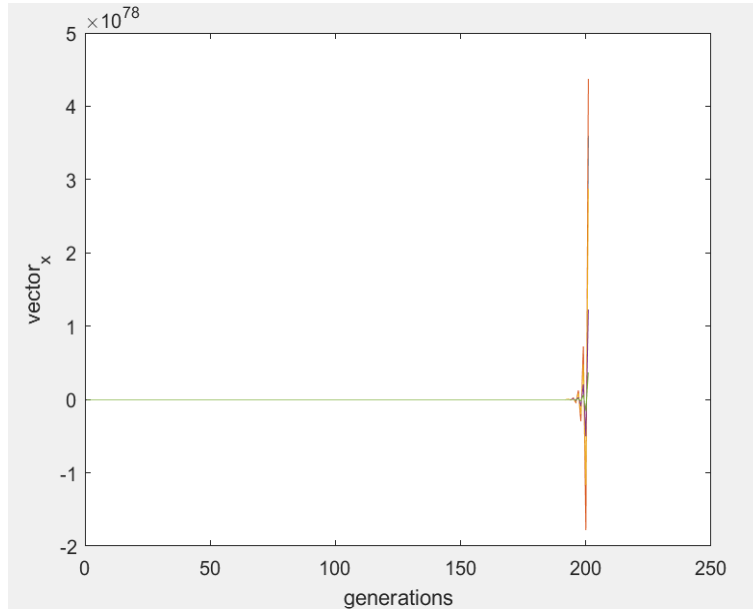


图 7: 雅克比迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

从图像中我们可以注意到，雅克比迭代并不收敛，是一个发散的，我们再求解了一下该迭代

对应的谱半径，发现它的谱半径为 2.4610，因此求得一个发散的结果也就不奇怪了。同样地，我们也没有必要去探讨它的精度了。

(3) 我们再用高斯-赛德尔迭代法对此方程进行求解，同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为初始值，迭代

200 次，所得结果如下：

$$x_3 = \begin{bmatrix} -20.06988316320216 \\ 54.27531949378768 \\ -46.26567114111089 \\ 17.31581273754203 \\ -2.159160234096267 \end{bmatrix} \quad (20)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

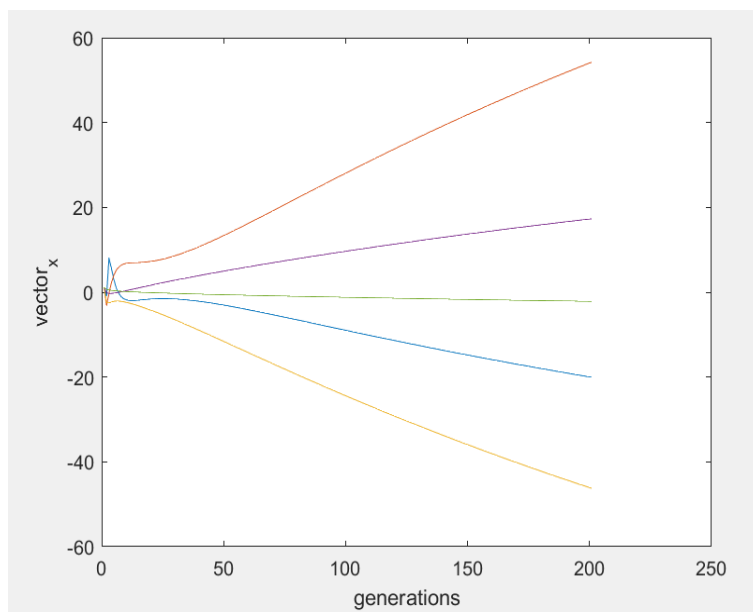


图 8: 高斯-赛德尔迭代向量 x 随迭代次数 (共 200 次) 的变化情况

我们从这个图像观察得到，它可能是一个发散的，然而我们再用 MATLAB 求了一下它对应的谱半径，为 0.9974，是小于 1 的。这说明这个迭代应当是收敛的，但是可能收敛速度较慢，以至于在短短的 200 次迭代中无法求得精确的数值，于是我们又用高斯-赛德尔进行了 2000 次迭代，

同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为初值，所得结果如下：

$$x_4 = \begin{bmatrix} -56.66627246736201 \\ 140.5466165183796 \\ -118.0124034024315 \\ 42.43758040947470 \\ -5.304649599033458 \end{bmatrix} \quad (21)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

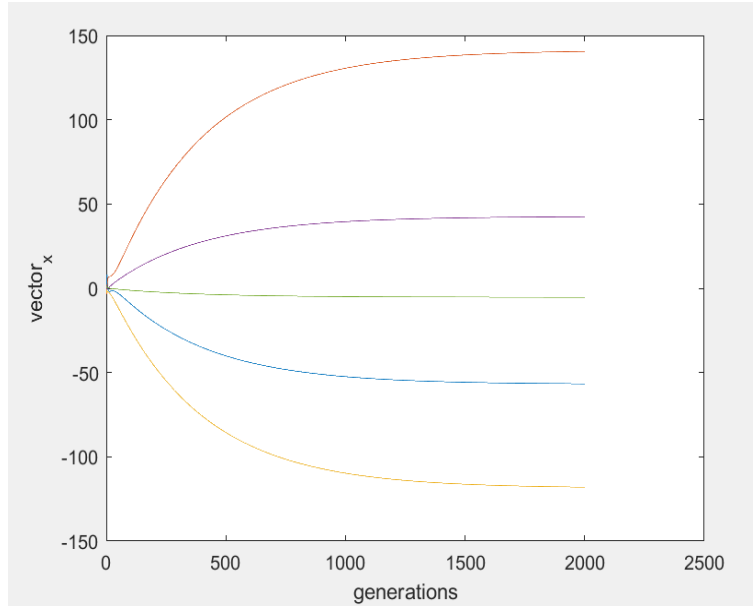


图 9: 高斯-赛德尔迭代向量 x 随迭代次数 (共 2000 次) 的变化情况

接下来我们对其精度进行考察,同样计算相对残差,用 MATLAB 求得的结果为 2.1059×10^{-4} ,可以说达到了一定的精度,但这个精度还不算特别高。

综上所述,我们可以看出对于三阶和五阶范德蒙矩阵为系数矩阵的线性方程组,高斯消去法求得的结果均是精度非常高的,雅克比迭代所求的结果均是发散的,而高斯-赛德尔迭代所求的结果均为收敛,但是其收敛速度不同,五阶范德蒙矩阵为系数矩阵的方程明显慢于三阶范德蒙矩阵为系数矩阵的方程的收敛速度,前者需要迭代更多的次数才能得到一个相应的精度。

2 不同阶数的希尔伯特矩阵为系数矩阵的线性方程组

2.1 研究条件数的变化

首先我们来探究一下希尔伯特矩阵的条件数随着阶数 k 的变化,我们在此选择 2-条件数进行分析。我们分别作了 $k \in (1,10)$, $k \in (1,20)$, $k \in (1,50)$ 的变化图像,结果如下:

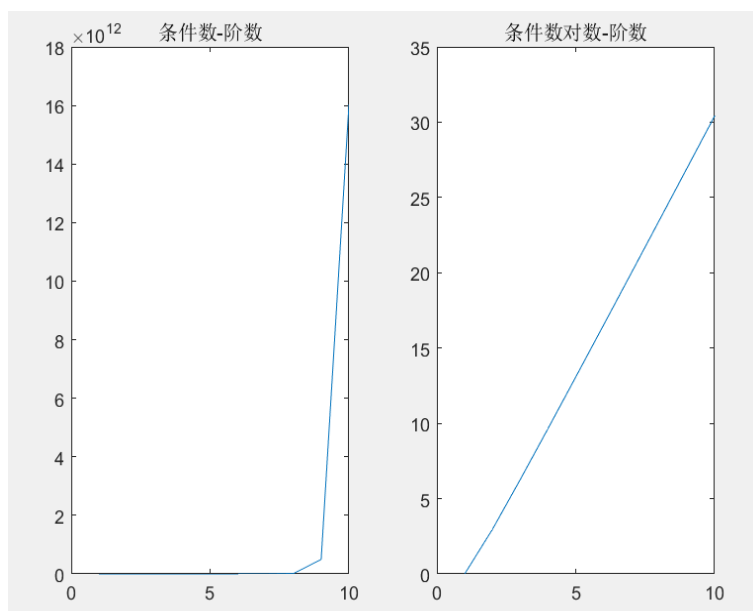


图 10: $k \in (1, 10)$

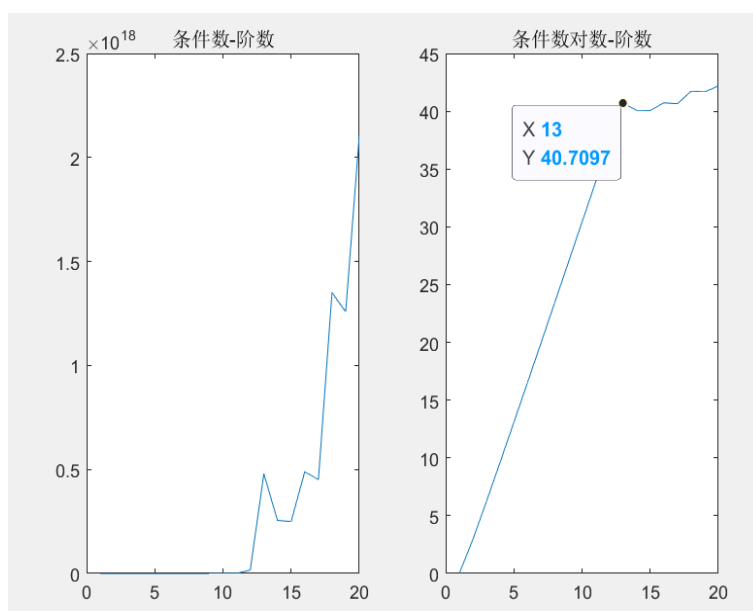


图 11: $k \in (1, 20)$

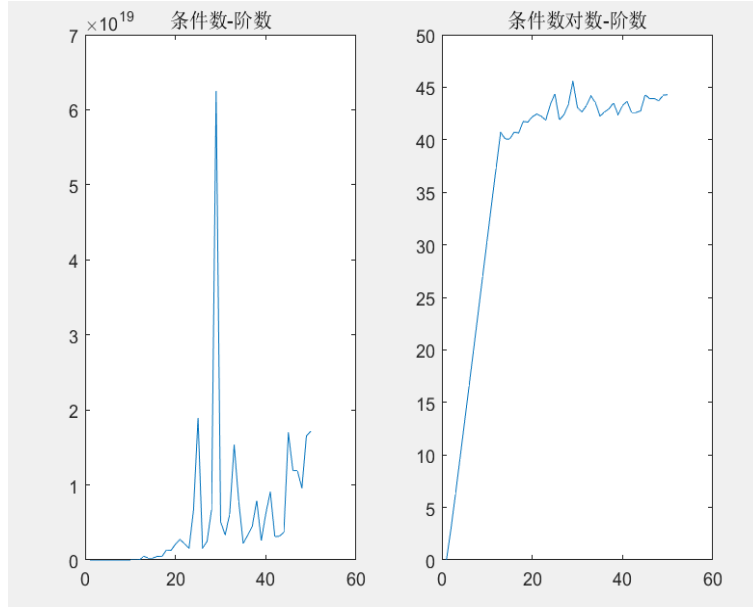


图 12: $k \in (1, 50)$

从图中我们可以发现，大概在 $k \in (1, 13)$ ，Hilbert 矩阵条件数随阶数的增长呈一个近似的指数关系，其条件数的对数与阶数的线性性也非常得好，但是从阶数大于 13 之后，其变化就不规律起来了，有时会发生突变，很难找到其中的规律。

2.2 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响

接下来我们考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响。因为我们需要对不同阶数的希尔伯特矩阵为系数矩阵的线性方程组进行分析，因此我们可以选择三阶、四阶、五阶的希尔伯特矩阵来进行分析。

2.2.1 系数矩阵出现的扰动对精确解的影响

我们将选择的三阶、四阶、五阶希尔伯特矩阵分别记为 H^1 、 H^2 和 H^3 ，选择的右端项分别为

$$b^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, b^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

且对三个系数矩阵均做类似的小扰动，为保证 $\|H^{-1}\| \cdot \|\delta H\| < 1$,

我们在此选择将系数矩阵的第六项（优先从列开始数）做一个 10^{-6} 的小扰动，将小扰动后的新矩阵分别记为 C^1 、 C^2 和 C^3 。

2.2.1.1 理论分析

我们首先通过理论分析来探究系数矩阵出现的扰动对精确解的影响。我们易用 MATLAB 求得 H^1 、 H^2 和 H^3 的 2-条件数和 2-范数，又因为 $\|\delta H^1\| = \|\delta H^2\| = \|\delta H^3\| = 10^{-6}$ ，因此我们可以根据式 (2) 进行理论分析，求得 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 的上界，现将结果呈现如下：

$\text{cond}(H^1)$	524.0568	$\text{cond}(H^2)$	1.5514×10^4	$\text{cond}(H^3)$	4.7661×10^5
$\ H^1\ $	1.4083	$\ H^2\ $	1.5002	$\ H^3\ $	1.5671
$\frac{\ \delta x^1\ }{\ x^1\ }$ 上界	3.7226×10^{-4}	$\frac{\ \delta x^2\ }{\ x^2\ }$ 上界	0.0104	$\frac{\ \delta x^3\ }{\ x^3\ }$ 上界	0.4371

2.2.1.2 实验分析

接下来我们通过 MATLAB 具体计算来考察系数矩阵出现的扰动对精确解的影响。我们首先求解方程 $Hx=b$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$x^1 = \begin{bmatrix} 27.0000 \\ -192.0000 \\ 210.0000 \end{bmatrix}, x^2 = \begin{bmatrix} -0.0640 \times 10^3 \\ 0.9000 \times 10^3 \\ -2.5200 \times 10^3 \\ 1.8200 \times 10^3 \end{bmatrix}, x^3 = \begin{bmatrix} 0.0125 \times 10^4 \\ -0.2880 \times 10^4 \\ 1.4490 \times 10^4 \\ -2.4640 \times 10^4 \\ 1.3230 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

然后再求解小扰动后得到的 $\bar{x}$ ，也即求解方程 $C\bar{x}=b$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 27.0058 \\ -192.0346 \\ 210.0346 \end{bmatrix}, \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} -0.0639 \times 10^3 \\ 0.8989 \times 10^3 \\ -2.5176 \times 10^3 \\ 1.8185 \times 10^3 \end{bmatrix}, \bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.0125 \times 10^4 \\ -0.2881 \times 10^4 \\ 1.4493 \times 10^4 \\ -2.4644 \times 10^4 \\ 1.3232 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

我们可以通过 MATLAB 分别求得， $\frac{\|\delta x^1\|}{\|x^1\|} = 1.7221 \times 10^{-4}$ ， $\frac{\|\delta x^2\|}{\|x^2\|} = 9.4452 \times 10^{-4}$ ， $\frac{\|\delta x^3\|}{\|x^3\|} = 1.7161 \times 10^{-4}$ ，均小于理论误差上界。我们知道，三个方程组的 H 的相对误差分别为 $\frac{\|\delta H^1\|}{\|H^1\|} = 7.1008 \times 10^{-7}$ ， $\frac{\|\delta H^2\|}{\|H^2\|} = 6.6658 \times 10^{-7}$ ， $\frac{\|\delta H^3\|}{\|H^3\|} = 6.3812 \times 10^{-7}$ ，可见虽然给 H 给了一个 10^{-7} 量级的小扰动，但是对方程的解的影响还是很大的，三个解的结果均达到了 10^{-4} 量级的误差，我们可以从前面的计算结果中得出，希尔伯特矩阵是一个条件数比较大的矩阵，可以称为一个病态矩阵，因此其对小扰动的依赖性比较强，也即很容易受到小扰动的干扰和影响。

2.2.2 右端项出现的扰动对精确解的影响

我们接下来考察右端项出现的扰动对精确解的影响，我们选择将三个右端项的第二项均变为 1.01，将小扰动后的右端项分别记为 c^1 、 c^2 和 c^3 。

2.2.2.1 理论分析

我们首先通过理论分析来探究系数矩阵出现的扰动对精确解的影响。

我们易用 MATLAB 求得 b^1 、 b^2 和 b^3 的 2-范数，又因为 $\|\delta b^1\| = \|\delta b^2\| = \|\delta b^3\| = 0.01$ ，因此我们可以根据式 (7) 求得 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 的上界，现将结果呈现如下：

$\text{cond}(H^1)$	524.0568	$\text{cond}(H^2)$	1.5514×10^4	$\text{cond}(H^3)$	4.7661×10^5
$\ b^1\ $	3.7417	$\ b^2\ $	5.4772	$\ b^3\ $	7.4162
$\frac{\ \delta x^1\ }{\ x^1\ }$ 上界	1.4006	$\frac{\ \delta x^2\ }{\ x^2\ }$ 上界	28.3247	$\frac{\ \delta x^3\ }{\ x^3\ }$ 上界	642.6607

2.2.2.2 实验分析

接下来我们通过 MATLAB 具体计算来考察右端项出现的扰动对精确解的影响。我们求解小扰动后的 $\bar{x}$ ，也即求解方程 $H\bar{x}=c$ ，在 MATLAB 中的求解结果为

$$\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 26.6400 \\ -190.0800 \\ 208.2000 \end{bmatrix}, \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} -0.0652 \times 10^3 \\ 0.9120 \times 10^3 \\ -2.5470 \times 10^3 \\ 1.8368 \times 10^3 \end{bmatrix}, \bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.0122 \times 10^4 \\ -0.2832 \times 10^4 \\ 1.4301 \times 10^4 \\ -2.4371 \times 10^4 \\ 1.3104 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

我们可以通过 MATLAB 分别求得， $\frac{\|\delta x^1\|}{\|x^1\|} = 0.0093$ ， $\frac{\|\delta x^2\|}{\|x^2\|} = 0.0105$ ， $\frac{\|\delta x^3\|}{\|x^3\|} = 0.0112$ ，均远远小于理论误差上界。而且我们注意到，三个方程组的 b 的相对误差分别为 $\frac{\|\delta b^1\|}{\|b^1\|} = 2.6726 \times 10^{-3}$ ， $\frac{\|\delta b^2\|}{\|b^2\|} = 1.8258 \times 10^{-3}$ ， $\frac{\|\delta H^3\|}{\|H^3\|} = 1.3484 \times 10^{-3}$ ，可以看出 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 比 $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ 高了两个数量级左右，这是因为希尔伯特矩阵是一个病态矩阵，因此其对小扰动的依赖性比较强，也即很容易受到小扰动的干扰和影响。

2.3 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代、SOR 迭代与带预处理的梯度法求解，对比求解精度。

我们接下来分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法求解方程。我们同样选取三阶、四阶和五阶的希尔伯特矩阵作为系数矩阵。

2.3.1 系数矩阵为三阶希尔伯特矩阵的方程求解

我们首先求系数矩阵为三阶希尔伯特矩阵的方程。因此系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \end{bmatrix} \quad (25)$$

我们选择的右端项为：

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (26)$$

接下来我们用不同的方法求解 $Ax=b$ 。

(1) 高斯消去法：我们用高斯消去法求解 $Ax=b$ ，所得结果如下：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 345.000000000002 \\ -2184.000000000001 \\ 2250.000000000001 \end{bmatrix} \quad (27)$$

我们求得其相对残差 $\epsilon = 1.9144 \times 10^{-15}$ ，同样我们认为这个误差是由于 MATLAB 存储数据位数受限引起的，高斯消元法求得的为一个精确解。

(2) 雅克比迭代法：我们用雅克比迭代法进行 200 次迭代，同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为初始值，

所得结果如下：

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1.10458847826747 \times 10^{48} \\ -2.08534970845038 \times 10^{48} \\ -2.58142649844830 \times 10^{48} \end{bmatrix} \quad (28)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

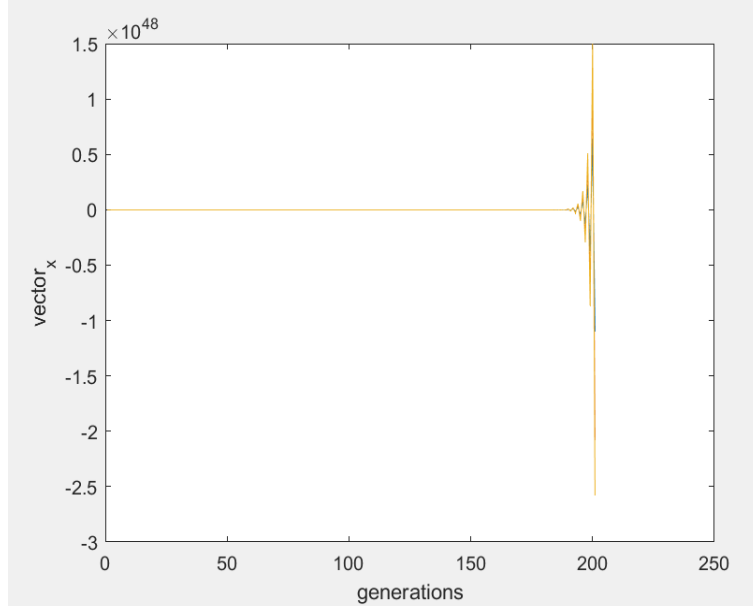


图 13: 雅克比迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

我们非常容易发现，图像是一个发散的，同时我们求解了其对应的谱半径，为 $1.7229 > 1$ ，证明该结论是合理的。

(3) 高斯-赛德尔迭代：我们用高斯-赛德尔进行 200 次迭代，同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为初始值，

所得结果如下：

$$x_2 = \begin{bmatrix} 335.337283093375 \\ -2134.68496660433 \\ 2204.46073643312 \end{bmatrix} \quad (29)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像，所得结果如下：

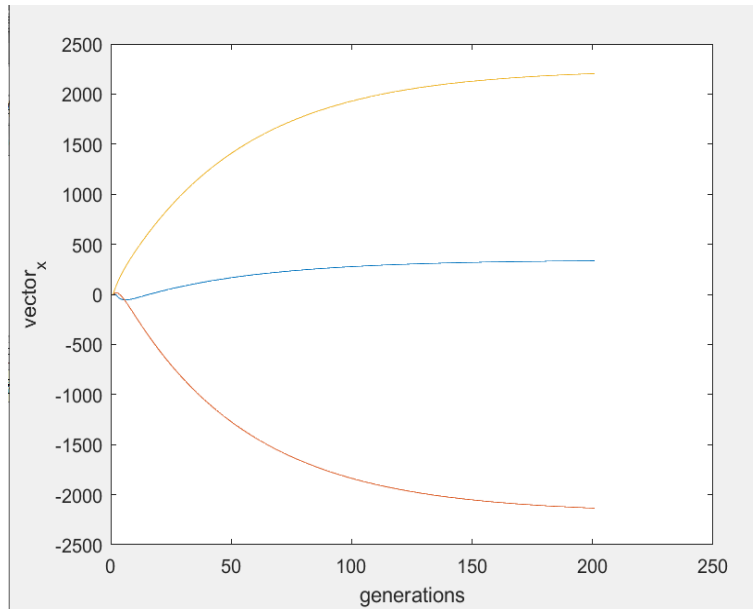


图 14: 高斯-赛德尔迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

我们求得其谱半径为 0.9809, 其相对残差为 0.0141, 可见高斯-赛德尔迭代虽然求出了相应的解, 但是其精度还不是很高。

(4)SOR 迭代: 我们用 SOR 迭代法, 同样以 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作为初始值, 我们计算并对比不同加权因子 ω 的收敛速度 (分别取 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2), 最终选择一个收敛速度最快的加权因子 $\omega=1.75$, 计算结果如下:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 344.999999279417 \\ -2183.99999659756 \\ 2249.99999704428 \end{bmatrix} \quad (30)$$

我们用 MATLAB 作出向量 x 随迭代次数的变化图像, 所得结果如下:

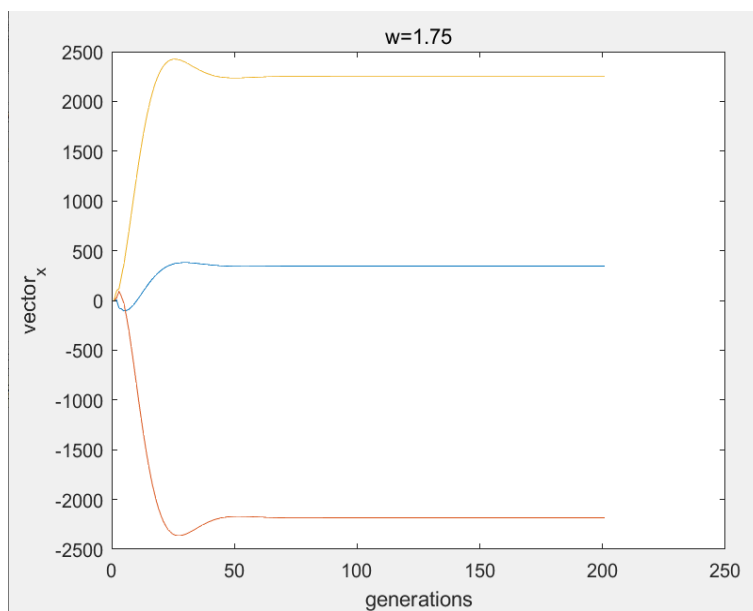


图 15: SOR 迭代向量 x 随迭代次数的变化情况

我们很明显看出 SOR 迭代的精度是远远高于高斯-赛德尔迭代的精度的，我们可以求得其相对残差为 1.9424×10^{-9} ，谱半径为 0.9017。

(5) 带预处理的梯度法：我们用 MATLAB 中的 pcg 函数进行求解，结果如下：

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 345.0000000000004 \\ -2184.000000000000 \\ 2250.000000000000 \end{bmatrix} \quad (31)$$

我们可以求得其相对残差为 3.3×10^{-13} ，可以看出其精度比 SOR 迭代都要高出不少，收敛速度更快。

我们最终将五种计算方法的精度进行对比，结果如下：

	高斯消元法	雅克比迭代	高斯-赛德尔迭代	SOR 迭代	带预处理的梯度法
残差	1.9144×10^{-15}	不收敛	0.0141	1.924×10^{-9}	3.3×10^{-13}
谱半径		1.7229	0.9809	0.9017	/

通过对解的分析，我们可以看出，高斯消去法的精度是最高的，基本可以说是没有误差；而雅克比迭代并不收敛，因此其解随着迭代次数的增加而趋向于正无穷；高斯-赛德尔迭代虽然收敛，但是其谱半径较大，收敛速度较慢，精度较低；SOR 则收敛速度更快，精度更高；而带预处理的梯度法精度则非常高，比前面三种迭代方式都更加精确。

2.3.2 系数矩阵为四阶希尔伯特矩阵的方程求解

我们接下来求系数矩阵为四阶希尔伯特矩阵的方程。因此系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \end{bmatrix} \quad (32)$$

我们选择的右端项为

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (33)$$

与 2.3.1 同理，我们可以分别用五种方法求解该方程，，因为该方程的计算量较大，迭代的收敛速度较慢，因此我们选择迭代次数为 1000 次。五种方法的求解结果分别如下 (以下依次为高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法的求解结果)：

$$x_1 = \begin{bmatrix} -299.999999999952 \\ 4619.99999999944 \\ -13259.9999999986 \\ 9659.99999999912 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \end{bmatrix} \quad (35)$$

(由于雅克比迭代发散，因此一千次迭代后求得结果趋向于正无穷)

$$x_3 = \begin{bmatrix} -91.9343628235397 \\ 2384.67027139314 \\ -8016.85427428948 \\ 6308.34340832853 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} -299.999999999952 \\ 4619.99999999944 \\ -13259.9999999986 \\ 9659.99999999912 \end{bmatrix} \quad (37)$$

(我们在比较了几个加权因子后，发现 ω 取 1.75 时的收敛速度最快，精度最高，因此取 $\omega=1.75$)

$$x_5 = \begin{bmatrix} -299.99999985174 \\ 4620.00000000766 \\ -13259.9999999917 \\ 9660.00000000343 \end{bmatrix} \quad (38)$$

接下来我们可以对结果进行精度分析，即计算相对残差，结果如下：

	高斯消元法	雅克比迭代	高斯-赛德尔迭代	SOR 迭代	带预处理的梯度法
相对残差	3.1233×10^{-14}	不收敛	0.0346	4.3819×10^{-5}	1.1×10^{-9}
谱半径		2.5821	0.9990	0.9895	/

通过对比我们可以得出和 2.3.2 类似的结论，也即雅克比迭代、高斯-赛德尔迭代、SOR 迭代和带预处理的梯度法精度逐渐升高，而高斯消去法的精度则高达 3.1233×10^{-14} ，基本可以称为一个精确解。同时系数矩阵为四阶希尔伯特矩阵的方程比系数矩阵为三阶希尔伯特矩阵的方程迭代收敛速度更慢，即使前者迭代了 1000 次，后者迭代了 200 次，前者的相对残差还是要比后者更大的。

2.3.3 系数矩阵为五阶希尔伯特矩阵的方程求解

我们接下来求系数矩阵为五阶希尔伯特矩阵的方程。因此系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 & 0.1250 & 0.1111 \end{bmatrix} \quad (39)$$

我们选择的右端项为

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} \quad (40)$$

与 2.3.2 同理，我们可以分别用五种方法求解该方程，注意到这个方程的求解难度比前一个更大，迭代的收敛速度更慢，因此我们选择迭代次数为 10000 次。五种方法的求解结果分别如下 (以下依次为高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法的求解结果)：

$$x_1 = \begin{bmatrix} -304.999999999732 \\ 839.999999993708 \\ 12810.0000000303 \\ -39200.0000000490 \\ 27090.0000000251 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \\ NaN \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} -521.860884762492 \\ 4820.87583238872 \\ -4149.93301946513 \\ -13808.3202709664 \\ 14749.0243167103 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$x_4 = \begin{bmatrix} -338.678374282214 \\ 1392.26518740679 \\ 10633.3371891028 \\ -36124.2535789693 \\ 25660.7843567618 \end{bmatrix} \quad (44)$$

(我们在比较了几个加权因子后,发现 ω 取 1.75 时的收敛速度最快,精度最高,因此取 $\omega=1.75$)

$$x_5 = \begin{bmatrix} -304.998965178490 \\ 840.000608655388 \\ 12810.0004298184 \\ -39199.9996380745 \\ 27090.0002809264 \end{bmatrix} \quad (45)$$

接下来我们可以对结果进行精度分析,即计算相对残差,结果如下:

	高斯消去法	雅克比迭代	高斯-赛德尔迭代	SOR 迭代	带预处理的梯度法
残差	1.3581×10^{-14}	不收敛	0.0054	0.0023	8.6×10^{-5}
谱半径		3.4441	9.9996×10^{-1}	0.9997	/

通过对结果的精度分析,我们可以得到与前面类似的结论。

综上所述,我们得出的结论为:对不同阶数的希尔伯特矩阵为系数矩阵的线性方程组而言,其雅克比迭代法均不收敛,高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法的精度逐渐提升,收敛速度逐渐加快,而高斯消去法所求得的结果基本上可以称为一个精确解。同时随着阶数的增高,方程求解难度增大,除高斯消去法的其他方法的迭代收敛速度和精度均有所下降。

3 实验总结

1. 通过本次实验,加深了对范德蒙矩阵、希尔伯特矩阵等病态矩阵的理解,深入了解了小扰动对其对应线性方程组的影响。
2. 通过用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代法、SOR 迭代法和带预处理的梯度法对线性方程组进行了求解,了解了不同求解方法的精度。
3. 加深了对 MATLAB 软件的学习以及数学的实际应用能力。